

文章编号: 1000-7598-(2005) 10-1541-04

非线性粘弹性基桩纵向混沌运动

胡春林^{1,2}, 程昌钧¹

(1. 上海大学 上海市应用数学与力学研究所, 上海 200072; 2. 武汉理工大学 土木工程与建筑学院, 武汉 430070)

摘 要: 研究了在给定桩顶轴向动位移条件下非线性粘弹性嵌岩桩纵向振动的混沌运动。假定基桩材料满足非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系、桩周土反力及阻尼分别与位移及速率成正比, 得到基桩的运动方程为非线性偏微分方程。利用 Galerkin 方法将方程简化, 并对简化后的系统进行了数值模拟计算, 得到了土反力、土阻尼、桩身阻尼比较大、比较小和很小等情形下不同参数时基桩运动的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面及分岔图等。结果表明纵向振动的非线性粘弹性桩可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或混沌运动。

关 键 词: 非线性粘弹性桩; 纵向振动; 混沌运动; 数值计算

中图分类号: O 322

文献标识码: A

Study on vertical chaotic motion of nonlinear viscoelastic pile

HU Chun-lin^{1, 2}, CHENG Chang-jun¹

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China;

2. School of Civil Engineering and Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: The vertical chaotic motion of the nonlinear viscoelastic pile embedded in rock with a vertical displacement, is investigated. Supposing that the pile satisfied the constitutive relations of nonlinear elasticity and linear viscoelasticity, and the reacting force of soil to the pile is in direct proportion to displacement and speed rate as well as the damp. The nonlinear partial differential equation of the pile motion is obtained. Based on the Galerkin method, the equation is simplified. Moreover the numerical simulations are carried out, from which the time-path curves, phase-trajectory diagrams, power spectrums, and Poincare section and bifurcation diagrams for the motion of piles are obtained with different parameters under the following conditions, such as the reacting force and the damp of the soil, the damp of the pile comparatively big, small and very small etc.. The results show that the vertical motion of the nonlinear viscoelastic pile could present periodic, quasi-periodic, bifurcation and chaotic motion.

Key words: nonlinear viscoelastic pile; vertical vibration; chaotic motion; numerical calculation

1 引 言

在高层建筑、桥梁和海上平台等工程中广泛采用了桩基础。由于桩与土的相互作用, 桩基础的运动过程属于复杂的非线性力学行为。线弹性基桩纵向振动的分析方法已比较成熟, 但对由非线性粘弹性材料组成的基桩, 其动力学研究发展相对显得不足。Novak^[1]的综述报告系统地总结了桩基动力学行为的主要研究工作, 介绍了桩基线性和非线性动力学的计算方法和一些定性的结论; 王奎华^[2]分析了粘弹性桩基的纵向振动; 王腾等^[3]得到了粘弹性桩纵向振动的积分变换解; 禹金云^[4]分析了单桩

在轴向扰力作用下的混沌运动。另外, Surie 和 Cederbaum^[5], 陈立群和程昌钧^[6]分析了粘弹性桩的稳定性和混沌运动。本文研究了给定桩顶轴向动位移条件及有阻尼线弹性土体的作用下具有非线性本构关系的基桩纵向振动的混沌运动, 得到了一些有益的结果。

2 数学模型

考虑给定桩顶轴向动位移条件的嵌岩圆形桩。设桩长为 l , 直径为 d , 横截面面积为 A , 材料密度为 ρ , 并设桩的轴向向上为 x 轴的正方向, 桩端中心处为轴向坐标原点。

假定基桩材料服从如下的非线性本构关系:

$$\sigma = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 + E_3 \varepsilon^3 + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (1)$$

式中 $\sigma(x, t)$ 为基桩的轴向应力, 设拉应力为正; $\varepsilon(x, t)$ 为桩基的轴向应变; E_1, E_2, E_3 分别为材料的弹性模量; η 为粘性系数。对于小变形, 轴向应变和桩的纵向位移 $U(x, t)$ 的关系为

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \quad (2)$$

设桩周土的反力及阻尼分别与位移及速率成正比, 则能够得到基桩纵向运动的非线性微分方程:

$$\rho A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + c \frac{\partial U}{\partial t} + kU - \frac{\partial}{\partial x} \left[E_1 A \frac{\partial U}{\partial x} + E_2 A \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + E_3 A \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^3 + \eta A \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right] = 0 \quad (3)$$

式中 c 为单位桩长范围内土的阻尼系数; k 为单位桩长范围内土的刚度系数。

对于嵌岩桩, 桩底位移为零, 底端条件为

$$U|_{x=0} = 0 \quad (4)$$

设桩顶给定位移

$$U|_{x=l} = -\frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (5)$$

其中 v_0 及频率 ω 为常数。对于轴向荷载作用下线弹性基桩的纵向运动, 式(5)可成为桩顶的实际位移。这里主要想考察给定确定性端部条件, 对于非线性粘弹性基桩是否会出现非确定的混沌运动。假设初始状态时基桩处于静止:

$$U(x, t)|_{t=0} = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

引入代换

$$w(x, t) = U(x, t) + \frac{v_0 x}{l \omega} (1 - \cos \omega t) \quad (7)$$

则由式(3)可得到以位移 w 表示的控制方程为

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + kw - \rho A \frac{v_0 \omega x}{l} \cos \omega t - \\ \frac{c v_0 x}{l} \sin \omega t - \frac{k v_0 x}{l \omega} (1 - \cos \omega t) - \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[E_1 A \frac{\partial w}{\partial x} + E_2 A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + E_3 A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + \right. \\ \left. \eta A \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \left(\frac{2 E_2 A v_0}{l \omega} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{3 E_3 A v_0}{l \omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right. \\ \left. (1 - \cos \omega t) + 3 E_3 A \frac{\partial w}{\partial x} \frac{v_0^2}{l^2 \omega^2} (1 - \cos \omega t)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

端部条件变为

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \quad (9)$$

3 问题的求解

由于方程(8)是非线性的, 通常难以求解, 这里采用 Galerkin 方法对问题进行简化。研究表明^[7], 对于粘弹性结构低阶 Galerkin 截断系统能够比较好地描述结构长时间的力学行为。因此, 根据端部条件式(9), 问题的解可取如下形式:

$$w(x, t) = T(t) \left(\cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right) \quad (10)$$

将式(10)代入(8), 两边同乘以 $\left(\cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right)$,

并在 $[0, l]$ 上积分, 同时设 $\tau = Bt$, 其中 $B = \frac{c}{\rho A} + \frac{4\pi^2 \eta}{3l^2 \rho}$,

为书写方便, 以下用 t 代替 τ , 可以得到无量纲位移振幅函数 $u(t)$ 满足的非线性微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + A_1 u^3 + (A_{20} + A_{21} \cos \Omega t + A_{22} \cos^2 \Omega t) u = \\ F_{10} + F_{11} \sin \Omega t + F_{12} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $u = T/l$; $\Omega = \frac{\omega}{B}$; $A_1 = \pi^2 E_{33}$; $A_{20} = 3k_1 + E_{11} -$

$E_{22} v + E_{33} v^2$; $A_{22} = E_{33} v^2$; $A_{21} = E_{22} v - 2E_{33} v^2$; $F_{10} = k_1 v$;

$F_{11} = c_1 v$; $F_{12} = v \Omega^2 / 3 - k_1 v$; $v = \frac{v_0}{\omega l}$; $E_{11} = \frac{4\pi^2 E_1}{3l^2 \rho B^2}$;

$E_{22} = \frac{8\pi^2 E_2}{3l^2 \rho B^2}$; $E_{33} = \frac{4\pi^2 E_3}{l^2 \rho B^2}$; $k_1 = \frac{k}{3\rho AB^2}$; $c_1 = \frac{c\omega}{3\rho AB^2}$,

均为无量纲。

初始条件相应变为

$$u(t)|_{t=0} = \frac{du(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (12)$$

4 数值分析结果和结论

采用变步长 Runge-Kutta 方法, 在初始条件式(12)下对式(11)进行数值求解。计算中取参数: 桩长 $l = 20$ m, 直径 $d = 0.35$ m, 密度 $\rho = 2.4$ g/cm³, 弹性模量 $E_1 = 2.1 \times 10^{10}$ Pa, $E_2 = 5.5 \times 10^{12}$ Pa, $E_3 = 2.5 \times 10^{14}$ Pa。下面分 4 种情形加以讨论。

情形 1. 土反力、土阻尼、桩身阻尼较大。取 $k = 2.2 \times 10^6$ Pa, $c = 2.2 \times 10^4$ Pa·s, $\eta = 1.0 \times 10^7$ Pa·s。计算中发现, 对于情形 1, 当 $\omega = 20\pi$, $v = 0.0013$ 时可得到较规则的时程曲线, 相平面图在经过了 600 个周期的计算后仍为闭轨线, 功率谱在基频及其倍频处出现尖峰, Poincare 映射图为一个不动点,

说明运动是周期运动。进一步的计算结果表明, 当 $\omega = (1 \sim 200)\pi$, $c_1 = 5.8826 \times 10^{-4} \sim 0.3696$ 时, 位移随 ν 的分叉图均为一根没有分岔的直线或曲线。换言之, 当桩身阻尼、桩周土阻尼较大和桩周土不太软弱时, 纵向振动的非线性粘弹性桩呈现稳定的周期运动或准周期运动。

情形 2. 土反力、土阻尼、桩身阻尼较小。取 $k = 2.2 \times 10^5 \text{ Pa}$, $c = 2.2 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\eta = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。当 $\Omega = 5.7646$, $c_1 = 1.6799$, $\nu = 0.0014$ 时, 可得图 1~4, 说明运动是准周期的; 当 $\Omega = 5.7646$, $c_1 = 1.6799$, $\nu = 0.0017$ 时, 可得图 5~8, 其中图

5 为极不规则的时程曲线, 图 6 的相平面图是经过 600 个循环得到的是扭结在一起的不封闭的轨线, 图 7 功率谱中出现噪声背景宽峰连续谱, 图 8 为 Poincare 映射图是成片的有层次结构的密集点。这从 4 个方面说明系统出现了混沌运动。当 $\Omega = 5.7646$, $c_1 = 1.6799$ 时得到图 9, 说明随着参数 ν 的增加, 基桩纵向振动的运动形式可以发生周期运动、准周期运动, 并进入分岔或阵发混沌运动状态。总之, 当桩身阻尼、桩周土阻尼较小和桩周土较软弱时, 纵向振动的非线性粘弹性桩可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或混沌运动。

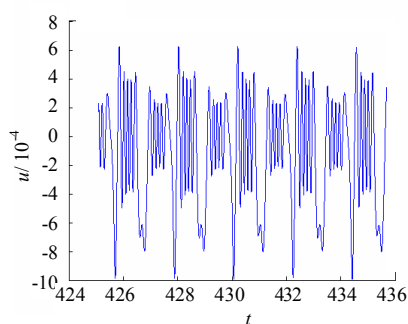


图 1 准周期运动的时程曲线

Fig.1 The time-path curve of quasi-periodic motion

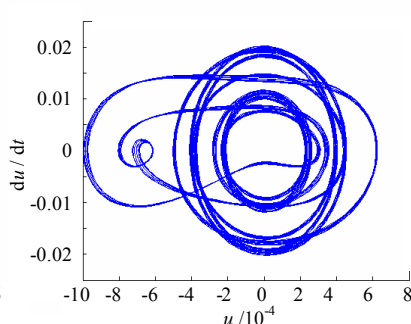


图 2 准周期运动的相平面图

Fig.2 The phase-trajectory of quasi-periodic motion

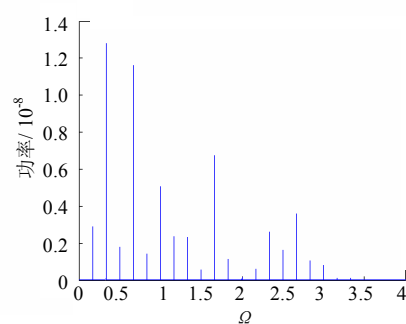


图 3 准周期运动的功率谱图

Fig.3 The power spectrums of quasi-periodic motion

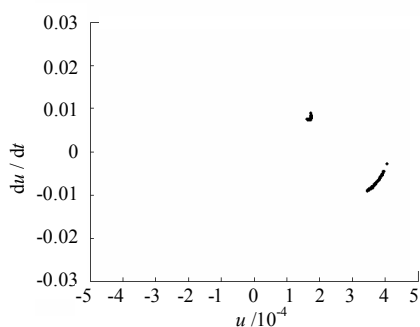


图 4 准周期运动的 Poincare 截面图

Fig.4 The Poincare section of quasi-periodic motion

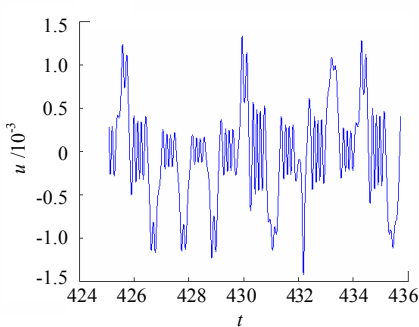


图 5 混沌运动的时程曲线

Fig.5 The time-path curve of chaotic motion

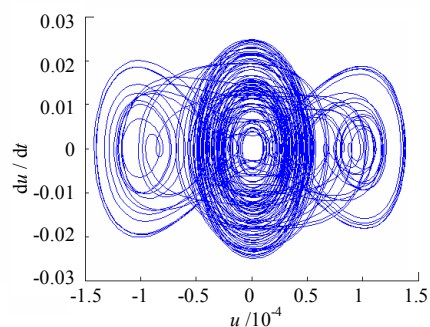


图 6 混沌运动的相平面图

Fig.6 The phase-trajectory of chaotic motion

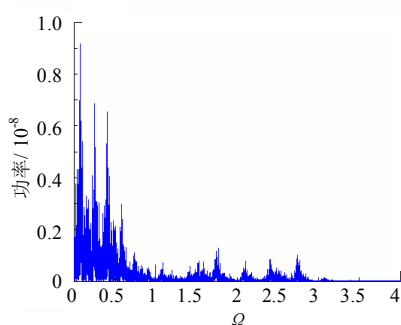


图 7 混沌运动的功率谱图

Fig.7 The power spectrums of chaotic motion

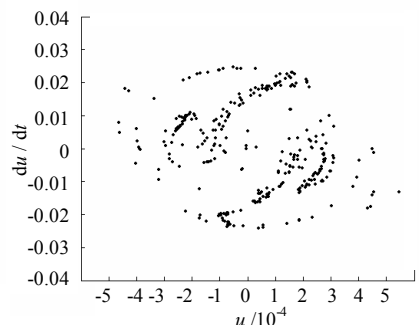


图 8 混沌运动的 Poincare 截面图

Fig.8 The Poincare section of chaotic motion

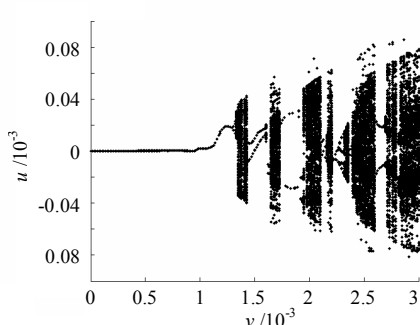


图 9 位移随参数 ν 的分叉图

Fig.9 Bifurcation diagram versus ν

情形 3. 土反力、土阻尼、桩身阻尼很小。取 $k = 2.2 \times 10^3 \text{ Pa}$, $c = 2.2 \times 10^2 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\eta = 1.0 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。计算表明, 当 $\Omega = 6.5004$, $c_1 = 2.1361$, $\nu = 0.0015$ 时, 系统也会出现混沌运动。对该情形由图 10 可见, 当参数 $\nu > 0.0012$ 时, 系统可能进入分岔或混沌运动状态。总之, 当桩身阻尼、桩周土阻尼很小和桩周土很软弱时, 纵向振动的非线性粘弹性桩更容易呈现准周期运动和混沌运动。

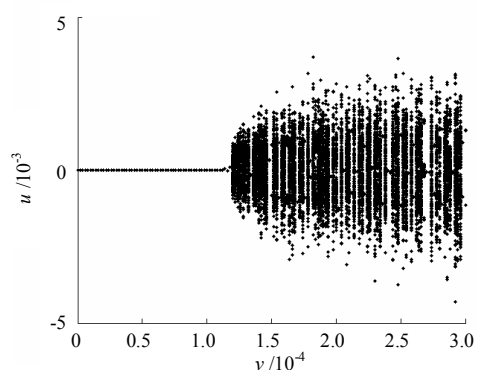


图 10 位移随参数 ν 的分叉图 (情形 3)

Fig.10 Bifurcation diagram versus ν (case 3)

情形 4. 土反力较大, 土阻尼及桩身阻尼很小。取 $k = 2.2 \times 10^5 \text{ Pa}$, 则 $k_1 = 339.9665$, 其余参数取值同情形 3, 计算结果见图 11。

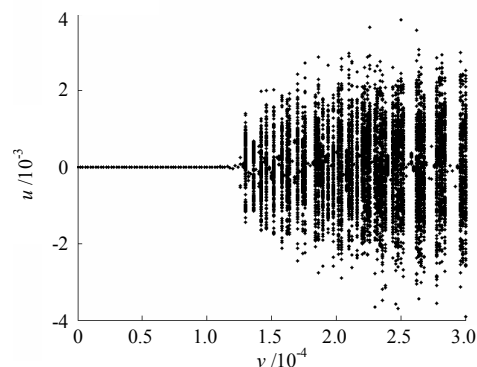


图 11 位移随参数 ν 的分叉图 (情形 4)

Fig.11 Bifurcation diagram versus ν (case 4)

与情形 3 相比, 虽然情形 4 土反力刚度系数增加较多, 但位移随参数 ν 的分叉图在定性上是一致的。换言之, 桩周土反力刚度系数对混沌特性的影响较小, 只要桩身阻尼和桩周土阻尼很小, 纵向振动的非线性粘弹性桩就可能呈现准周期运动和混沌运动。

5 结 语

当桩身阻尼、桩周土阻尼较小和桩周土较软弱时, 纵向振动的非线性粘弹性桩可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或混沌运动; 桩身阻尼及桩周土阻尼的增加有抑制基桩混沌运动的作用; 当桩顶轴向位移频率满足一定的范围时基桩才可能进入混沌运动状态; 参数 ν 越小时基桩越不容易进入分岔混沌状态; 在开始进入混沌运动以后, 随着参数 ν 取值的不同基桩有可能混沌也可能是分岔或准周期运动, 呈现出阵发混沌的现象。

参 考 文 献

- [1] Novak M. Piles under dynamic loads[A]. *Proceedings of Second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Sore Dynamics*[C]. Japan: [s.n.]. 1991. 2 433—2 456.
- [2] 王奎华. 成层广义 Voigt 地基中粘弹性桩纵向振动分析与应用[J]. 浙江大学学报. 2002, 36(3): 565—571.
WANG Kui-hua. The analyses of vertical vibration of the viscoelastic pile under the Voigt ground and its applications[J]. *Journal of Zhejiang University*, 2002, 36(3): 565—571.
- [3] 王腾, 王奎华, 谢康和. 粘弹性桩纵向振动问题的积分变换解[J]. 工业建筑, 2001, 31(1): 42—45.
WANG Teng, WANG Kui-hua, XIE Kang-huo. The integral transform solution of vertical vibration of the viscoelastic pile[J]. *Industry Building*, 2001, 31(1): 42—45.
- [4] 禹金云. 混凝土单桩在轴向抗力作用下的混沌运动[J]. 振动与冲击, 2001, 20(4): 6—9.
YU Jin-yin. The chaotic motion of the concrete pile with an axial force[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2001, 20(4): 6—9.
- [5] Suire G, Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear bars under harmonic excitations[J]. *International Journal of Mechanics Science*, 1995, 37(5): 753—772.
- [6] 陈立群, 程昌钧. 非线性粘弹性柱的稳定性和混沌运动[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(6): 890—896.
CHEN Li-qun, CHENG Chang-jun. Stability and chaotic motion in columns of nonlinear viscoelastic meterical[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(6): 890—896.
- [7] 陈立群, 程昌钧. 关于基于 Galerkin 截断的粘弹性结构动力学行为研究[J]. 自然杂志, 1999, 21(1): 1—4.
CHEN Li-qun, CHENG Chang-jun. Study on the dynamics of the viscoelastic structure based on the Galerkin method[J]. *Chinese Journal of Nature*, 1999, 21(1): 1—4.